МЕТОДЫ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ПРИЕМНЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗИРОВАННЫМИ АНТЕННЫМИ РЕШЕТКАМИ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК.

Тихонов Рустам Сергеевич, к.т.н.

Оглавление

Сокращения и обозначения **2**

Введение **3**

1 Матрицы и векторы: основные определения и операции **4**
1.1 Введение 4
1.2 Скалярное произведение векторов 6
1.3 Операторы проецирования 6
1.4 Собственные векторы и собственные значения 8
1.5 Поэлементное умножение матриц и векторов 10
1.6 Тензорное умножение матриц и векторов 10

2 Обращение матриц **12**
2.1 Обратная матрица 12
2.2 Обращение матриц специального вида 13
2.2.1 Обращение диагональной матрицы 13
2.2.2 Обращение матрицы типа $\mathbf{N}_r$ 14
2.2.3 Обращение матрицы типа $\mathbf{M}_r$ 16
2.2.4 Обращение нижнетреугольной матрицы 17
2.3 Вычисление оценки обратной ковариационной матрицы на основе обучающего пакета 18
2.4 Вращение Гивенса 20
2.5 Отражения Хаусхолдера 23

3 Дифференцирование в задачах оптимизации ААР **29**
3.1 Операции дифференцирования 29

4 Моделирование помеховой обстановки **34**

Сокращения и обозначения

ААР — адаптивная антенная решетка

ДН — диаграмма направленности

РЛС — радиолокационная станция

ФАР — фазированная антенная решетка

$\mathbf{A}^T$ — транспонирование матрицы

$\mathbf{A}^*$ — комплексное сопряжение матрицы

$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T$ — эрмитово сопряжение матрицы

$\mathbf{A}^{-1}$ — обратная матрица

$\mathbf{I}$ — единичная матрица

$tr(\mathbf{A})$ — след матрицы

$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}$ — норма вектора

j — мнимая единица

Общее замечание. Система обозначений в справочнике аналогична той, которая встречается в многочисленных монографиях и статьях по цифровой обработке сигналов: матрицы будем обозначать заглавными буквами полужирным шрифтом ($\mathbf{A}$), векторы-столбцы — строчными буквами полужирным шрифтом ($\mathbf{s}$), скалярные величины — заглавными и строчными буквами без выделения их полужирным шрифтом (α, A).

Введение

В настоящее время одним из перспективных направлений развития радиотехнических систем является переход к *многоканальной* обработке сигналов [1–8]. В радиолокации интерес к таким системам во многом обусловлен необходимостью обеспечения устойчивой работы в условиях воздействия различного рода помех как активных (шумовые и имитационные помехи), так и пассивных (отражения от подстилающей поверхности и местных предметов). Наличие нескольких приемных каналов позволяет реализовать разделение помехи и полезного сигнала не только по времени, частоте и поляризации, но и по направлению прихода, что существенно повышает помехоустойчивость.

Определяющую роль в развитии многоканальных систем обработки сигналов также сыграло появление в конце 1990-х — начале 2000-х годов скоростных АЦП/ЦАП, а также высокопроизводительных сигнальных процессоров (как специализированных, так и реализованных на базе ПЛИС), а также радикальное удешевление данной электронной компонентной базы к настоящему времени.

Естественным способом представления сигналов в многоканальных системах является *векторная* форма записи. Например, совокупность отсчетов сигналов, принятых одновременно в N приемных каналах многоканальной антенной решетки, удобно объединить в вектор-столбец $\mathbf{x}$ размерности $N \times 1$. При этом преобразования сигнала удобно представляются с помощью матриц.

Такое представление не только упрощает запись, но и позволяет привлечь для анализа и синтеза алгоритмов обработки развитый аппарат матричной алгебры.

В данном справочнике в сжатой форме собран материал о базовом математическом аппарате, используемом при синтезе алгоритмов управления ААР. Это позволит читателю получить требуемые сведения, не тратя большой объем времени на их поиск в различных источниках. Рассмотрены как основные операции работы с матрицами, так и ряд специальных вопросов, посвященных получению оценки обратной ковариационной матрицы помех, а также дифференцированию векторов как действительных, так и комплексных [9–13].

Глава 1

Матрицы и векторы: основные определения и операции

1.1 Введение

Определим матрицу $\mathbf{A}$ размерности $N \times M$ (состоящую из N строк и M столбцов) как:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через a_{ij} элемент матрицы $\mathbf{A}$, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Также в некоторых случаях будем пользоваться обозначением $[\mathbf{A}]_{ij}$.

Определим вектор-столбец размерности $N \times 1$ как:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем для краткости будем называть вектор-столбец просто вектором. Если нам понадобится производить операции с вектором-строкой, то вектор-столбец надо будет транспонировать.

Произведением матрицы $\mathbf{A}$ размерностью $N \times M$ и матрицы $\mathbf{B}$ размерностью $M \times L$ является матрица $\mathbf{C}$ размерностью $N \times L$, элементы которой равны:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{M} a_{ik} b_{kj}.$$

Операцией транспонирования матрицы называется операция замены ее строк на столбцы, таким образом, что $[\mathbf{A}^T]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}$.

Матрица $\mathbf{A}$ называется симметричной при выполнении условия: $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Пример симметричной матрицы 4×4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Операцией эрмитова сопряжения называется операция замены ее строк на столбцы с комплексным сопряжением элементов: $[\mathbf{A}]_{ij} = ([\mathbf{A}]_{ji})^*$.

Матрица $\mathbf{A}$ называется эрмитовой при выполнении условия: $a_{ij} = a_{ji}^*$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^H.$$

Пример эрмитовой матрицы 4×4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12}^* & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33} & a_{34} \\ a_{14}^* & a_{24}^* & a_{34}^* & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Характерными представителями симметричных матриц являются ковариационные матрицы при представлении сигналов в действительной форме. При представлении сигналов в комплексной форме ковариационные матрицы являются эрмитовыми.

Важным свойством эрмитовой матрицы является то, что все ее собственные значения являются действительными числами.

Приведем некоторые свойства, связанные с операциями транспонирования и эрмитова сопряжения:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
3. $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_N)^T = \mathbf{A}_N^T \cdots \mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T$
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H$
5. $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$
6. $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_N)^H = \mathbf{A}_N^H \cdots \mathbf{A}_2^H\mathbf{A}_1^H$

Следом матрицы $tr(\mathbf{A})$ называется сумма ее диагональных элементов:

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Свойства следа матрицы:

1. $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
2. $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$
3. $tr(\mathbf{ABC}) = tr(\mathbf{CAB}) = tr(\mathbf{BCA})$.

В задачах адаптивной обработки сигналов след ковариационной матрицы помех — это важная величина, равная мощности помеховых сигналов на выходе приемных каналов ААР.

1.2 Скалярное произведение векторов

Для введения метрики (т.е. способности измерять длины и углы) в линейном пространстве вводят понятие скалярного произведения (англ. inner product). Говорят, что в вещественном пространстве $\mathbb{R}$ задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ из $\mathbb{R}$ поставлено в соответствие вещественное число $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. При этом выполняются условия 1-3:

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0; (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$

Пространства, где помимо условий 1-3 выполняется еще и условие 4, называют евклидовым векторным пространством.

В дальнейшем для обозначения скалярного произведения действительных векторов будем использовать более компактную запись: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$.

Длиной или модулем вектора $\mathbf{a}$ в евклидовом пространстве называется квадратный корень из его скалярного квадрата. Указанную величину также называют евклидовой нормой вектора $\mathbf{a}$:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{(\mathbf{a}^T\mathbf{a})}.$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0.$$

Для комплексных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ скалярное произведение определяется как $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^H\mathbf{b}$. Такой подход обеспечивает положительность нормы комплексного вектора: $\mathbf{a}^H\mathbf{a} \geq 0$.

В самом деле, рассмотрим для некоторого ненулевого вектора $\mathbf{a}$ *скалярное произведение* $(j\mathbf{a})^T j\mathbf{a} = j^2\mathbf{a}^T\mathbf{a} < 0$*, что противоречит определению нормы.*

Приведем ниже некоторые свойства скалярного произведения комплексных векторов, которые имеют отличия от приведенных выше свойств скалярного произведения действительных векторов:

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})^*$
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha^*(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Различие в определении скалярного произведения необходимо учитывать при работе с комплексным представлением сигналов, которое широко используется при описании алгоритмов ААР.

1.3 Операторы проецирования

Рассмотрим рис. 1.1 и найдем проекцию вектора $\mathbf{b}$ на направление, заданное вектором $\mathbf{a}$.

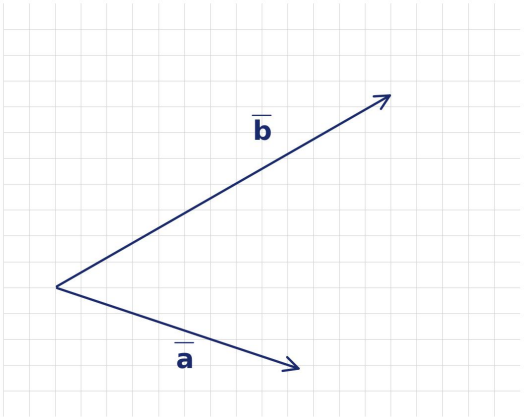

Рис. 1.1. Вектора **a** и **b**.

Для этого умножим вектор **a** на некоторую скалярную величину χ и построим прямоугольный треугольник, образованный векторами $\chi\mathbf{a}$, **b** и **c**, как это показано на рис. 1.2.

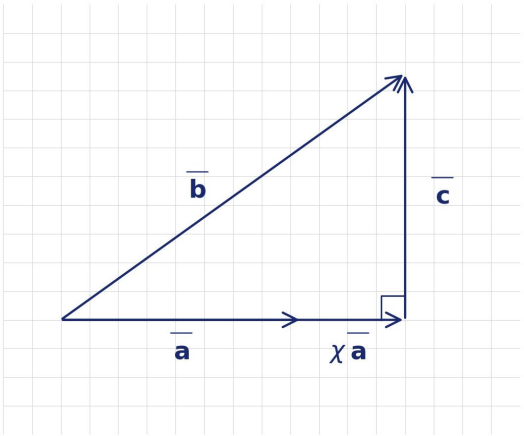

Рис. 1.2. Треугольник, образованный векторами $\chi\mathbf{a}$, **b** и **c**.

Для данного треугольника справедливо: $\mathbf{b} = \chi\mathbf{a} + \mathbf{c}$, тогда $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \chi\mathbf{a}$. Исходя из ортогональности векторов **a** и **c** можно записать: $\mathbf{a}^T(\mathbf{b} - \chi\mathbf{a}) = 0$. Раскрывая скобки, получаем: $\mathbf{a}^T\mathbf{b} - \chi\mathbf{a}^T\mathbf{a} = 0$. Из получившегося уравнения находим скалярную величину χ, равную:

$$\chi = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}.$$

Тогда проекция вектора **b** на направление, заданное вектором **a**, равна:

$$\mathbf{b}_\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}.$$

Определим оператор проецирования:

$$\mathbf{P_a} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}},$$

тогда формула для нахождения проекции вектора $\mathbf{b}$ на направление, заданное вектором $\mathbf{a}$, может быть записана компактнее: $\mathbf{b_a} = \mathbf{P_a}\mathbf{b}$.

Возвращаясь к выражению для вектора $\mathbf{c}$: $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \chi\mathbf{a}$, подставляем в него выражение для скалярной величины χ, получим: $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}$. Представляя вектор $\mathbf{b}$ как $\mathbf{I}\mathbf{b}$ и вынося его за скобки, получим выражение для проекции вектора $\mathbf{b}$ на направление, ортогональное вектору $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{b}_\mathbf{a}^\perp = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\right)\mathbf{b}.$$

Аналогично, определим матрицу оператора ортогонального проецирования:

$$\mathbf{P}_\mathbf{a}^\perp = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}},$$

тогда $\mathbf{b}_\mathbf{a}^\perp = \mathbf{P}_\mathbf{a}^\perp\mathbf{b}$.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{V}$ взаимно ортогональных векторов $\mathbf{v_i}$ размерностью $N \times M$ ($||\mathbf{v_i}|| = 1, \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = 0$, при $i \neq j$). Тогда проекция вектора $\mathbf{b}$ размерностью $N \times 1$ в подпространство, определяемое векторами, составляющими матрицу $\mathbf{V}$, равна:

$$\mathbf{b_V} = \mathbf{P_V}\mathbf{b},$$

где $\mathbf{P_V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T$.

Аналогично, можно записать и оператор проецирования вектора $\mathbf{b}$ в подпространство, ортогональное определяемому векторами, составляющими матрицу $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T.$$

Для комплексных векторов соответствующие выражения для операторов проецирования будут иметь вид:

$$\mathbf{P_a} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^H}{\mathbf{a}^H\mathbf{a}}, \quad \mathbf{P}_\mathbf{a}^\perp = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^H}{\mathbf{a}^H\mathbf{a}}, \quad \mathbf{P_V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H, \quad \mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H.$$

1.4 Собственные векторы и собственные значения

Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размерности $N \times N$ вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ называется *собственным вектором*, а число λ — соответствующим ему *собственным значением*, если выполняется равенство:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \tag{1.1}$$

Геометрически это означает, что действие матрицы $\mathbf{A}$ на собственный вектор $\mathbf{u}$ сводится только к его масштабированию (растяжению или сжатию) в λ раз без изменения направления.

Из определения (1.1) следует, что собственные значения являются корнями характеристического уравнения:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Это уравнение степени N, поэтому матрица $\mathbf{A}$ имеет ровно N собственных значений (с учётом кратности).

В задачах адаптивной обработки сигналов центральную роль играет *ковариационная матрица* помех $\mathbf{R}_{\text{пш}}$. Эта матрица является эрмитовой:

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^H = \mathbf{R}_{\text{пш}}.$$

Эрмитовость вытекает из определения ковариационной матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}^H = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}^H = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{R}_{\text{пш}}$. Эрмитовы матрицы обладают рядом замечательных свойств, имеющих важное практическое значение для задач адаптивной обработки:

1. Все собственные значения вещественны: $\lambda_n \in \mathbb{R}$, несмотря на то, что сама матрица в общем случае комплексная. Сумма собственных значений ковариационной матрицы помех равна суммарной мощности действующих помех и собственных шумов, а также равна следу матрицы:

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = tr(\mathbf{R}_{\text{пш}}). \tag{1.2}$$

2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны: $\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = 0$ при $i \neq j$. Для эрмитовой матрицы всегда существует ортонормированный базис из собственных векторов в пространстве $\mathbb{C}^N$. Данное свойство является важным, поскольку позволяет при некоторых условиях выделить подпространство собственных векторов, свободное от помех, а также лежит в основе ряда подходов по снижению размерности ковариационной матрицы помех (необходимо для снижения требований к объему обучающей выборки и вычислительной сложности алгоритмов управления в ААР) [14].

3. Эрмитова матрица $\mathbf{R}$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{R}_{\text{пш}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H, \tag{1.3}$$

   где $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N]$ — унитарная матрица ($\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}$), составленная из собственных векторов; $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ — диагональная матрица собственных значений.

4. В базисе собственных векторов эрмитова матрица имеет диагональный вид (см. выражение (1.3)):

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^H \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{U}.$$

5. Для любого ненулевого вектора $\mathbf{w}$ справедливо $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{w} \geqslant 0$. Это означает, что все собственные значения ковариационной матрицы неотрицательны: $\lambda_n \geqslant 0$. Физически $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{w}$ — это мощность сигнала на

выходе схемы весовой обработки с весами $\mathbf{w}$, которая не может быть отрицательной.

В общем случае эрмитовость матрицы гарантирует только то, что ее собственные значения вещественны. Однако т.к. $\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{nn}\mathbf{w} = \mathbb{E}|\mathbf{w}^H\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$*, то все собственные значения* $\lambda_n \geqslant 0$*, а ковариационная матрица является положительно полуопределенной.*

1.5 Поэлементное умножение матриц и векторов

Для матриц одинакового размера $N \times M$ $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ операция поэлементного умножения (англ. Hadamard product) определена как:

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1M}b_{1M} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2M}b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}b_{N1} & a_{N2}b_{N2} & \cdots & a_{NM}b_{NM} \end{pmatrix}.$$

Если мы имеем дело с частным случаем — векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ размера $N \times 1$, тогда:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_Nb_N \end{pmatrix}^T.$$

Приведем некоторые свойства поэлементного произведения матрицы:

1. $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C})$
3. $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \circ \mathbf{B}^T$
4. $\mathbf{a}\mathbf{b}^T \circ \mathbf{c}\mathbf{d}^T = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c})(\mathbf{b} \circ \mathbf{d})^T$

Поэлементное умножение применяется при оконной обработке сигналов с использованием весовых окон Чебышева, Кайзера и др. Например, для получения требуемого уровня боковых лепестков диаграммы направленности антенной решетки необходимо умножить элементы опорного вектора $\mathbf{s}$, характеризующего направление прихода полезного сигнала, на элементы вектора весового окна $\mathbf{w}$: $\mathbf{s_t} = \mathbf{s} \circ \mathbf{w}$.

В задачах обработки сигналов в адаптивных антенных решетках поэлементное умножение ковариационной матрицы помех $\mathbf{R}$ на специальную матрицу весов $\mathbf{T}$ используется, например, для расширения нулей диаграммы направленности адаптивной антенной решетки: $\mathbf{R_{MZ}} = \mathbf{T} \circ \mathbf{R}$ [7, 15].

1.6 Тензорное умножение матриц и векторов

Для матриц $\mathbf{A}$ размера $N \times M$ и $\mathbf{B}$ размера $P \times Q$ операция тензорного умножения (англ. Kronecker product) определена как:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1M}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2M}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{B} & a_{N2}\mathbf{B} & \cdots & a_{NM}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

При этом итоговая матрица будет иметь размерность $NP \times MQ$.

Для векторов размера $N \times 1$ и $M \times 1$ $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ результатом тензорного произведения будет вектор размерностью $NM \times 1$:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_M & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_N b_{M-1} & a_N b_M \end{pmatrix}^T.$$

Приведем некоторые свойства тензорного произведения матрицы:

1. $\mathbf{A} \otimes (\alpha \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$
2. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H \otimes \mathbf{B}^H$
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$
4. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$
5. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$
6. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$
7. $\mathbf{I_M} \otimes \mathbf{I_N} = \mathbf{I_{MN}}$

Рассмотрим практически пример применения тензорного произведения для построения опорного вектора антенной решётки [8]. Для *одномерной* N-элементной антенной решётки (линейки излучателей) вдоль оси x опорный вектор, описывающий фазовое распределение принимаемого сигнала по апертуре, имеет вид:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\psi_x} & \dots & e^{-j\psi_x(N-1)} \end{pmatrix}^T,$$

где $\psi_x = \frac{2\pi d_x \sin\varphi}{\lambda}$, d_x — межэлементное расстояние, λ — длина волны несущей, φ — угол азимута в направлении приема полезного сигнала.

Для *двумерной* антенной решётки с N элементами вдоль оси x и M элементами вдоль оси y опорный вектор удобно представить через тензорное произведение двух векторов, каждый из которых описывает фазовое распределение вдоль своей оси:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_x \otimes \mathbf{s}_y,$$

где

$$\mathbf{s}_x = \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\psi_x} & \dots & e^{-j\psi_x(N-1)} \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{s}_y = \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\psi_y} & \dots & e^{-j\psi_y(M-1)} \end{pmatrix}^T,$$

$$\psi_x = \frac{2\pi d_x \sin\varphi\cos\theta}{\lambda}, \qquad \psi_y = \frac{2\pi d_y \sin\varphi\sin\theta}{\lambda}.$$

Здесь d_y — межэлементное расстояние вдоль оси y, φ и θ — азимут и угол места соответственно. Операция тензорного умножения позволяет как бы нанизать одно фазовое распределение на другое, при этом итоговый вектор $\mathbf{s}$ имеет размерность $NM \times 1$ и описывает совместное фазовое распределение по антенной решетке.

Аналогичная структура произведения используется в *пространственно-временной адаптивной обработке* (STAP): там тензорное произведение пространственного и временного (доплеровского) опорных векторов формирует совместный пространственно-временной вектор [7].

Глава 2

Обращение матриц

При обработке сигналов в адаптивных антенных решетках часто приходится решать задачу нахождения оценки обратной ковариационной матрицы помех. Данная процедура является достаточно затратной с точки зрения необходимых вычислительных ресурсов. При этом использование напрямую классических методов обращения матриц имеет ряд недостатков. Во-первых, это рост разрядности за счет того, что перед вычислением оценки обратной ковариационной матрицы необходимо сформировать выборочную оценку самой ковариационной матрицы. Во-вторых, сложность аппаратурной реализации [5].

В данной главе приведены основные свойства обратной матрицы, способы обращения матриц специального вида. Рассмотрен алгоритм формирования оценки обратной ковариационной матрицы, в основе которого лежит приведение матрицы обучающего пакета к нижнетреугольному виду с помощью преобразований Гивенса или Хаусхолдера.

2.1 Обратная матрица

Для некоторой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размерностью $N \times N$, чей ранг равен N ($rank(\mathbf{A}) = N$) можно найти обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, такую что справедливо:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Запишем некоторые свойства обратной матрицы:

1. $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$
2. $\left(\mathbf{A}^*\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^*$
3. $\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Для эрмитовой матрицы обратная матрица будет также эрмитовой.

Существуют некоторые виды матриц: ортогональные (когда речь идет о действительных числах) и унитарные (в случае с комплексными числами),

для которых справедливы следующие соотношения соответственно:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I},$$
$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Также приведем некоторые полезные соотношения, касающиеся операции обращения матриц:

1. $\left[\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{C}^H\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\right]^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^H\left[\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^H + \mathbf{B}\right]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$
2. $\left[\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\right]^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{C}^H\left[\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^H + \mathbf{B}\right]^{-1}$
3. $\mathbf{B}^{-1} - \left[\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^H + \mathbf{B}\right]^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\left[\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{C}^H\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\right]^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{B}^{-1}$

Положив в первом соотношении $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ (единичная матрица), а $\mathbf{C}^H = \mathbf{x}$ (где $\mathbf{x}$ — вектор сигналов размерности $N \times 1$ с выходных каналов ААР), получим формулу Шермана–Моррисона:

$$\left[\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{x}^H\right]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{x}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}.$$

С ее помощью можно предложить итерационный алгоритм по вычислению выборочной оценки обратной ковариационной матрицы помех $\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}}^{-1}$:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}\,k+1}^{-1} = \hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}\,k}^{-1} - \frac{\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}\,k}^{-1}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^H\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}\,k}^{-1}}{1 + \mathbf{x}_k^H\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}\,k}^{-1}\mathbf{x}_k}, \tag{2.1}$$

где начальное приближение $\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}\,0}^{-1} = \sigma_{\text{ш}}^{-2}\mathbf{I}$, $\sigma_{\text{ш}}^2$ — дисперсия собственных шумов приемных каналов адаптивной антенной решетки.

Несмотря на простоту формулы Шермана-Моррисона, для аппаратной реализации более удобны рассмотренные ниже методы, основанные на унитарных преобразованиях обучающего пакета (вращения Гивенса и отражения Хаусхолдера).

2.2 Обращение матриц специального вида

В общем случае нахождение обратной матрицы — это процедура, связанная с относительно большим объемом вычислений. Однако существуют некоторые виды матриц, для которых эта процедура достаточно проста. Так, в алгоритмах обработки сигналов в адаптивных антенных решетках при поиске оценки обратной ковариационной матрицы помех стараются привести матрицу обучающего пакета к нижнетреугольной матрице, которая, как мы увидим, достаточно легко обращается.

2.2.1 Обращение диагональной матрицы

Рассмотрим диагональную матрицу размера $N \times N$:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{pmatrix}$$

Обратная матрица $\mathbf{D}^{-1}$ имеет вид:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^1\!/_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^1\!/_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}^1\!/_{d_N} \end{pmatrix}$$

То есть для того, чтобы получить обратную матрицу к диагональной достаточно вычислить обратные значения диагональных элементов исходной матрицы.

2.2.2 Обращение матрицы типа $\mathbf{N}_r$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{N}_r$ размера $N \times N$ следующего вида:

$$\mathbf{N}_r = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & n_{r+1,r} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & n_{N,r} & & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{N}_r$ отличается от единичной матрицы наличием r-го столбца под главной диагональю, заполненного ненулевыми элементами. Несложно убедиться, что обратная матрица $\mathbf{N}_r^{-1}$ имеет вид:

$$\mathbf{N}_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & -n_{r+1,r} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -n_{N,r} & & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица $\mathbf{N}_r^{-1}$ сохраняет структуру исходной матрицы $\mathbf{N}_r$, но в r-м столбце знаки элементов под главной диагональю меняются на противоположные.

Для получения матрицы с ненулевыми элементами ниже главной диагонали в столбцах от i до k ($i < k, i \geq 1, k < N$) достаточно перемножить соответствующее число матриц типа $\mathbf{N}_r$:

$$\mathbf{N}_i\mathbf{N}_{i+1}\cdots\mathbf{N}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & n_{i+1,i} & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & n_{k+1,k} & 1 & \\ & & & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & n_{N,i} & & n_{N,k} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

При работе с матрицами типа $\mathbf{N}_r$ и произведениями подобных матриц полезно также помнить следующие свойства (для $k > i$):

- $\mathbf{N}_i\mathbf{N}_{i+1}\cdots\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_{i+1} + \cdots + \mathbf{N}_k - (k-i)I$
- $\mathbf{N}_i^{-1}\mathbf{N}_{i+1}^{-1}\cdots\mathbf{N}_k^{-1} = (k-i+2)I - \mathbf{N}_i - \mathbf{N}_{i+1} - \cdots - \mathbf{N}_k$

Вместе с тем, необходимо отметить, что при обращении матрицы типа $\mathbf{N}_{ik}$ с ненулевыми столбцами ниже главной диагонали с номерами $i \ldots k$ меняется порядок перемножения матриц типа $\mathbf{N}_r$:

$$\mathbf{N}_{ik}^{-1} = \mathbf{N}_k^{-1}\mathbf{N}_{k-1}^{-1}\cdots\mathbf{N}_i^{-1}.$$

Таким образом, к сожалению, вычисление обратной матрицы $\mathbf{N}_{ik}$ не сводится к простой замене знаков ее элементов ниже главной диагонали. Однако при внимательном рассмотрении можно заметить, что вычисление произведения матриц $\mathbf{N}_k^{-1}\mathbf{N}_{k-1}^{-1}\cdots\mathbf{N}_i^{-1}$ требует значительно меньше операций умножения-сложения, чем это может показаться «прямым» счетом.

Рассмотрим подходы к поиску обратной матрицы $\mathbf{N}_{ik}$ на примере обращения матрицы 5×5 вида (матрицы такого вида называют унитреугольными — на практике нас будет интересовать именно этот случай):

$$\mathbf{N}_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & m & 1 & 0 & 0 \\ c & n & p & 1 & 0 \\ d & k & q & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Нахождение обратной матрицы $\mathbf{N}_{15}^{-1}$ сводится к поиску произведения матриц $\mathbf{N}_{15}^{-1} = \mathbf{N}_5^{-1}\mathbf{N}_4^{-1}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{N}_1^{-1}$ и выполнению следующих шагов.

Шаг 1. Очевидно, что вычисление произведения первых множителей тривиально и сводится к замене знака одного элемента:

$$\mathbf{N}_5^{-1}\mathbf{N}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшая работа требует проведения небольшого объема арифметических операций, показанных в шагах 2-4.

Шаг 2:

$$\mathbf{N}_5^{-1}\mathbf{N}_4^{-1}\mathbf{N}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & -x & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_0 = px - q$.

Шаг 3:

$$\mathbf{N}_5^{-1}\cdots\mathbf{N}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-p&1&0\\0&0&\alpha_0&-x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-m&1&0&0\\0&-n&0&1&0\\0&-k&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-m&1&0&0\\0&\beta_0&-p&1&0\\0&\beta_1&\alpha_0&-x&1\end{pmatrix},$$

где $\beta_0 = mp - n$ и $\beta_1 = -m\alpha_0 + nx - k$.

Шаг 4:

$$\mathbf{N}_5^{-1}\cdots\mathbf{N}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-m&1&0&0\\0&\beta_0&-p&1&0\\0&\beta_1&\alpha_0&-x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-a&1&0&0&0\\-b&0&1&0&0\\-c&0&0&1&0\\-d&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-a&1&0&0&0\\\gamma_0&-m&1&0&0\\\gamma_1&\beta_0&-p&1&0\\\gamma_2&\beta_1&\alpha_0&-x&1\end{pmatrix},$$

где $\gamma_0 = ma - b$, $\gamma_1 = -a\beta_0 + pb - c$, $\gamma_2 = -a\beta_1 - b\alpha_0 + cx - d$.

На приведенном примере видно, что на каждом шаге модифицируется один столбец матрицы, при этом необходимо вычислить только элементы $n_{i+2,i}\cdots n_{N,i}$, стоящие под главной диагональю. Это позволяет не только рационально использовать вычислительные мощности для расчета обратной матрицы, но и ресурсы памяти.

2.2.3 Обращение матрицы типа $\mathbf{M}_r$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{M}_r$ размера $N \times N$ следующего вида:

$$\mathbf{M}_r=\begin{pmatrix}1&&\cdots&&0\\&\ddots&&&\\&&1&&\\m_{r,1}&\cdots&m_{r,r-1}&1&\vdots\\&&&\ddots&\\0&&\cdots&&1\end{pmatrix}$$

От единичной матрицы $\mathbf{M}_r$ отличается наличием r-й строки с ненулевыми элементами левее главной диагонали. Матрицы типа $\mathbf{M}_r$ также легко обращаются путем замены знака элементов r-й строки левее главной диагонали на противоположные:

$$\mathbf{M}_r^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\cdots&&0\\&\ddots&&&\\&&1&&\\-m_{r,1}&\cdots&-m_{r,r-1}&1&\vdots\\&&&\ddots&\\0&&\cdots&&1\end{pmatrix}$$

Для получения матрицы схожей структуры, но с ненулевыми строками левее главной диагонали от i-й до k-й строки достаточно также перемножить соответствующие матрицы типа $\mathbf{M}_r$:

$$\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}\cdots\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ m_{i,1} & \cdots & m_{i,i-1} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ m_{k,1} & & \cdots & & m_{k,k-1} & 1 & \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

При работе с матрицами типа $\mathbf{M}_r$ и произведениями подобных матриц полезно также помнить следующие свойства:

- $\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}\cdots\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{i+1} + \cdots + \mathbf{M}_k - (k-i)I$
- $\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{M}_{i+1}^{-1}\cdots\mathbf{M}_k^{-1} = (k-i+2)I - \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1} - \cdots - \mathbf{M}_k$

При этом для нахождения обратного произведения матриц типа $\mathbf{M}_r$ можно воспользоваться подходом, изложенным для матриц типа $\mathbf{N}_r$.

2.2.4 Обращение нижнетреугольной матрицы

Рассмотрим нижнетреугольную матрицу $\mathbf{A}$ размера $N \times N$ с элементами $d_1 \dots d_N$ на главной диагонали:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & 0 \\ a_{2,1} & d_2 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ a_{i,1} & & & d_i & & & \vdots \\ a_{i+1,1} & & & a_{i+1,i} & d_{i+1} & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ a_{N,1} & & \cdots & a_{N,i} & & \cdots & d_N \end{pmatrix}$$

Представим матрицу $\mathbf{A}$ в виде произведения двух матриц — диагональной $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{A})$ и матрицы $\mathbf{A}'$ вида:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ \frac{a_{2,1}}{d_1} & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \frac{a_{i,1}}{d_1} & & & 1 & & & \vdots \\ \frac{a_{i+1,1}}{d_1} & & & \frac{a_{i+1,i}}{d_i} & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ \frac{a_{N,1}}{d_1} & & \cdots & \frac{a_{N,i}}{d_i} & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что матрица $\mathbf{A}'$ может быть далее представлена в виде произведения матриц типа $\mathbf{N}_r$: $\mathbf{A}' = \mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 \cdots \mathbf{N}_i \cdots \mathbf{N}_N$.

Таким образом, исходная нижнетреугольная матрица $\mathbf{A}$ может быть факторизована в виде произведения матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 \ldots \mathbf{N}_i \ldots \mathbf{N}_N\mathbf{D}.$$

Такой подход значительно упрощает обращение нижнетреугольных матриц, т.к. сводится к нахождению обратной матрицы диагональной матрицы $\mathbf{D}$ и произведения матриц типа $\mathbf{N}_r$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_N^{-1}\mathbf{N}_{N-1}^{-1} \ldots \mathbf{N}_i^{-1} \ldots \mathbf{N}_1^{-1}.$$

Рассмотрим подробнее работу с преобразованиями, которые используются для приведения матрицы обучающего пакета $\mathbf{Y}$ к нижнетреугольному виду.

2.3 Вычисление оценки обратной ковариационной матрицы на основе обучающего пакета

Рассмотрим ниже алгоритм нахождения оценки обратной ковариационной матрицы помех с помощью унитарных преобразований (вращений Гивенса или отражений Хаусхолдера), не требующий предварительного вычисления оценки ковариационной матрицы.

Для сигналов, которые являются выборками гауссовского случайного процесса с нулевым средним, выборочная оценка ковариационной матрицы помех вычисляется по следующей формуле:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}} = \frac{1}{K}\sum_{n=1}^{K}\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n), \tag{2.2}$$

здесь $\mathbf{x}(n)$ — выборочное значение вектора $\mathbf{x}(t)$, K — объем обучающей выборки (как правило, $K > 2N$, где N — размерность вектора $\mathbf{x}$).

Введём понятие обучающего пакета $\mathbf{Y}$ — матрицы размерностью $N \times K$, столбцы которой представляют собой векторы $\mathbf{x}(n)$. Выборочная оценка ковариационной матрицы помех связана с обучающим пакетом соотношением:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}} = \frac{1}{K}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H.$$

Таким образом, задача вычисления $\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}}^{-1}$ эквивалентна нахождению $(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H)^{-1}$.

Коротко алгоритм нахождения оценки обратной ковариационной матрицы выглядит так [5]:

1. Матрицу $\mathbf{Y}$ с помощью унитарного преобразования (вращений Гивенса или отражений Хаусхолдера) приводим к нижнетреугольному виду:

   $$\mathbf{Y}\mathbf{U} = \left(\mathbf{L}, \mathbf{0}\right),$$

   где $\mathbf{U}$ — унитарная матрица (произведение матриц Гивенса или Хаусхолдера), $\mathbf{L}$ — нижнетреугольная матрица размерности $N \times N$, $\mathbf{0}$ — матрица размерности $N \times (K - N)$, целиком заполненная нулями;

2. Полученную нижнетреугольную матрицу $\mathbf{L}$ обращаем методами, описанными в разделе 2.2, получаем матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ и $\left(\mathbf{L}^{-1}\right)^H$;

3. Вычисляем оценку обратной ковариационной матрицы помех $\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}}^{-1} = K\left(\mathbf{L}^{-1}\right)^H \mathbf{L}^{-1}$.

Дополнительно прокомментируем шаги 1 и 2 представленной последовательности действий. С первого взгляда может показаться неочевидным переход от матрицы обучающего пакета $\mathbf{Y}$ к нижнетреугольной матрице $\mathbf{L}$. Необходимо помнить, что унитарное преобразование не меняет ни длин векторов, ни углов между ними. Таким образом, рассматривая строки матрицы обучающего пакета $\mathbf{Y}$ как систему из N векторов, очевидно, что действие матрицы $\mathbf{U}$ просто меняет ее вид (для унитарного преобразования всегда $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$):

$$\mathbf{Y}\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{Y}^H = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H.$$

Отбрасывание нулевой части $\mathbf{0}$ преобразованного с помощью матрицы $\mathbf{U}$ обучающего пакета также легко объясняется следующим соотношением:

$$\left(\mathbf{L}, \mathbf{0}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{L}^H \\ \mathbf{0}^H\end{pmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{L}^H + \mathbf{0}\mathbf{0}^H = \mathbf{L}\mathbf{L}^H.$$

С прикладной точки зрения помимо получения $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$ существует необходимость вычисления обратных ковариационных матриц специального вида:

1. $\hat{\mathbf{R}}_{\beta}^{-1} = (\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}} + \beta^2\mathbf{I})^{-1}$

2. $\hat{\mathbf{R}}_{T}^{-1} = (\hat{\mathbf{R}}_{\text{пш}} \circ \mathbf{T})^{-1}$

В первом случае необходимость обусловлена применением регуляризации для улучшения ДН ААР, во втором — применением взвешивающих матриц (например, матрицы Майлокса-Затмана) для расширения нулей ДН ААР [15, 16].

Для случая регуляризации достаточно добавить слева к обучающему пакету $\mathbf{Y}$ матрицу $\beta\mathbf{I}$ [7]. Таким образом, размерность матрицы обучающего пакета вырастет с $N \times K$ до $N \times K + N$.

Во втором случае процедура более трудоемкая. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — нижнетреугольная матрица разложения Холецкого взвешивающей матрицы $\mathbf{T} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^H$. Расширенный обучающий пакет $\mathbf{Y}_T$ размера $N \times NK$ строится построчно: m-я строка $\mathbf{Y}_T$ равна тензорному произведению m-й строки матрицы $\mathbf{\Gamma}$ на m-ю строку матрицы $\mathbf{Y}$ [7]:

$$\mathbf{Y}_T = \begin{pmatrix}[\mathbf{\Gamma}]_{1,:} \otimes [\mathbf{Y}]_{1,:} \\ [\mathbf{\Gamma}]_{2,:} \otimes [\mathbf{Y}]_{2,:} \\ \vdots \\ [\mathbf{\Gamma}]_{N,:} \otimes [\mathbf{Y}]_{N,:}\end{pmatrix}.$$

При такой конструкции справедливо:

$$\mathbf{Y}_T\mathbf{Y}_T^H = \mathbf{T} \circ (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H).$$

2.4 Вращение Гивенса

Преобразование Гивенса (вращение Гивенса) служит для поворота вектора вокруг начала координат на некоторый угол φ.

Для того чтобы понять, как применяется преобразование Гивенса для приведения обучающего пакета к нижнетреугольному виду, лучше начать с рассмотрения простого случая — поворота двухмерного вектора вокруг начала координат по часовой стрелке на угол φ (см. рис. 2.1).

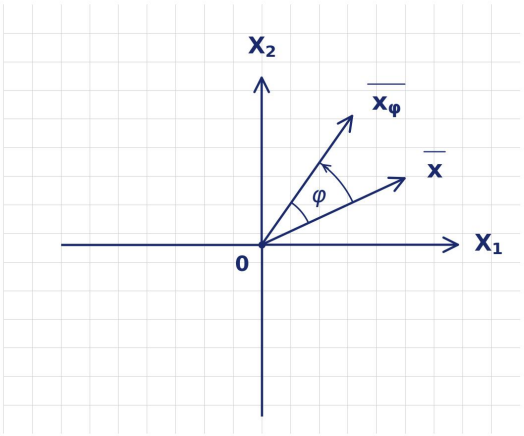

Рис. 2.1. Поворот вектора $\mathbf{x}$ на угол φ.

Матрица такого преобразования записывается в виде (это мы хорошо помним из курса линейной алгебры):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

В свою очередь, вектор $\mathbf{x}_\varphi$ будет определяться выражением: $\mathbf{x}_\varphi = \mathbf{G}\mathbf{x}$. При этом очевидно, что действие матрицы $\mathbf{G}$, определяемой формулой (2.3), на любой вектор будет аналогичным — он будет повернут против часовой стрелки на угол φ относительно начала координат.

Для краткости матрицу преобразования также можно записать в виде:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}.$$

С учетом решаемой нами задачи по приведению обучающего пакета к нижнетреугольному виду полезным было бы научиться поворачивать вектор так, чтобы при повороте он совпадал с одной из осей. При этом одна из координат обнуляется. Такой поворот, очевидно, потребует вычисления матрицы Гивенса индивидуально для каждого поворачиваемого вектора (хотя ранее в случае поворота на фиксированный угол φ матрица $\mathbf{G}$ для всех векторов была одинакова, см. формулу (2.3)). Так, если мы хотим повернуть против часовой стрелки вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ (см. рис. 2.2), чтобы его направление совпало с осью X_1, то матрица такого преобразования будет

иметь вид:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

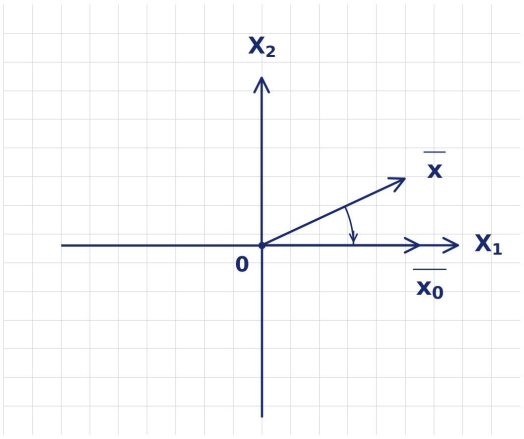

Рис. 2.2. Поворот вектора $\mathbf{x}$ на ось X_1.

Несложно проверить, что:

$$\mathbf{x_0} = \mathbf{G}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, длина вектора при повороте, очевидно, остается неизменной.

Обобщая на случай комплексной переменной можно записать преобразование Гивенса в виде:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} c^* & s \\ -s^* & c \end{pmatrix},$$

где:

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}}, s = \frac{x_2^*}{\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}}.$$

Справочно: Когда мы имеем дело с вектором строкой (а при работе с обучающим пакетом мы будем преобразовывать именно строки), то для случая действительного вектора преобразование будет иметь вид: $\mathbf{x_G} = \mathbf{x}\mathbf{G}^\mathbf{T}$

Теперь рассмотрим преобразование вектора размерностью $k \times 1$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_i, & \dots & x_j, & \dots & x_k \end{pmatrix}^T.$$

Преобразуем данный вектор $\mathbf{x}$ к виду:

$$\mathbf{x_G} = \mathbf{G_{ij}x} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & \sqrt{|x_i|^2 + |x_j|^2}, & \dots & 0 & \dots & x_k \end{pmatrix}^T.$$

Проведенное преобразование касается только двух элементов вектора, стоящих на позициях i и j. При этом матрица $\mathbf{G}_{ij}$ преобразования будет иметь вид:

$$\mathbf{G_{ij}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c_{ii}^* & & s_{ij} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -s_{ji}^* & & c_{jj} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $c = \frac{x_i}{\sqrt{|x_i|^2+|x_j|^2}}$, $s = \frac{x_j}{\sqrt{|x_i|^2+|x_j|^2}}$.

При работе с прямоугольной матрицей размерности $N \times K$ для приведения ее к нижнетреугольному виду (с той оговоркой, что, строго говоря, для прямоугольной матрицы этот термин неприменим) потребуется выполнить $(K-1)$ вращений Гивенса для обнуления всех элементов первой строки заданной матрицы за исключением элемента в ее первой колонке. Далее для обнуления всех элементов второй строки заданной матрицы за исключением элементов в ее первой и второй колонках потребуется выполнить $(K-2)$ вращений Гивенса и т.д. Таким образом, общее требуемое число вращений Гивенса составит: $N_G = (K-1) + (K-2) + \ldots + (K-N) = KN - \frac{N(N+1)}{2}$.

Очевидно, что практическая реализация алгоритма по формированию нижнетреугольной матрицы с помощью вращений Гивенса не требует реализации перемножения матрицы обучающего пакета $\mathbf{Y}$ на матрицы Гивенса N_G раз.

При перемножении некоторой строки обучающего пакета во взаимодействии с матрицей Гивенса участвуют только i-й и j-й элементы строки. При этом для вычисления одного модифицированного элемента обучающего пакета требуется произвести две операции умножения и одно сложение. При преобразовании k-й строки обучающего пакета ненулевые элементы, взаимодействующие с матрицей Гивенса, находятся в строках с $k+1$ по N; элементы выше k-й строки обращены в ноль ранее, вычисление элементов k-й строки не требует проведения математических операций: так, i-й элемент преобразованного обучающего пакета равен корню из суммы квадратов элементов на местах i и j, j-й элемент равен нулю.

Таким образом, число элементов, которые вычисляются при проведении одного вращения Гивенса обучающего пакета $\mathbf{Y}$, равно $2(N-k)$, где k — номер строки, для которой вычисляется матрица Гивенса. Таким образом, общее число элементов обучающего пакета, которые подвергаются преобразованию, равно: $\sum_{k=1}^{N} 2(K-k)(N-k) = (K+1)N^2 - N^3/3 + N/3$.

Пример: приведение обучающего пакета 3×5 к нижнетреугольному виду

Рассмотрим на конкретном примере матрицы $N \times K = 3 \times 5$, как последовательно обнуляются элементы правее диагонали. Символ $\times$ — элемент, обнуляемый на данном шаге. Рамкой обведены столбцы, модифицируемые вращением. Обнуление ведётся *справа налево* в каждой строке.

Строка 1: обнуляем 4 элемента (позиции 5, 4, 3, 2).

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & \times \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{15}} \begin{pmatrix} * & * & * & \times & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{14}} \begin{pmatrix} * & * & \times & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{G}_{13}} \begin{pmatrix} * & \times & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{12}} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Строка 2: обнуляем 3 элемента (позиции 5, 4, 3).

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \times \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{25}} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \times & 0 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{24}} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \times & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{G}_{23}} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Строка 3: обнуляем 2 элемента (позиции 5, 4).

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{35}} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \times & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_{34}} \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{L} \mid \mathbf{0}\,)$$

Итого: $N_G = 4 + 3 + 2 = 9$ вращений Гивенса. В общем случае для матрицы $N \times K$:

$$N_G = (K-1) + (K-2) + \ldots + (K-N) = KN - \frac{N(N+1)}{2}.$$

2.5 Отражения Хаусхолдера

Для приведения обучающего пакета к нижнетреугольной матрице также используется еще одно унитарное преобразование — отражение Хаусхолдера. Чтобы лучше понять, в чем суть данного преобразования, рассмотрим простой пример, связанный с отражением вектора $\mathbf{x}$ относительно некоторой плоскости П. Рассмотрим вектор $\mathbf{u}$ ($\|\mathbf{u}\| = 1$), ортогональный плоскости П, а также вектор $\mathbf{x}$, составляющий с данной плоскостью угол φ (см.

рис. 2.3).

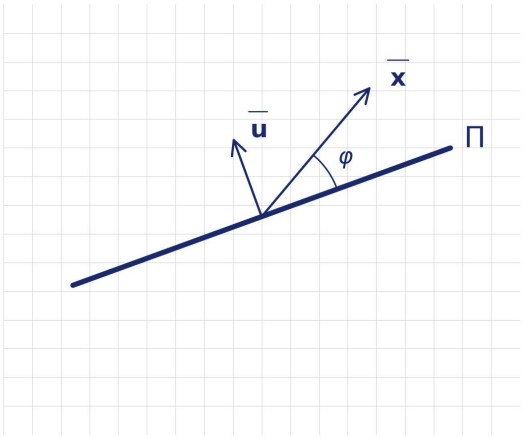

Рис. 2.3. Положение векторов **u** и **x** относительно плоскости П.

На рис. 2.3 плоскость П проецируется в линию (показана утолщенной линией). При этом ключевым элементом является не сама плоскость П, а ортогональный ей вектор **u** (можно даже представить, что вектор **u** жестко связан с плоскостью П и мы имеем возможность, держа его и управляя им как джойстиком, изменять положение плоскости П). Отразим вектор **x** относительно плоскости П в вектор $\mathbf{x}_H$ как показано на рис. 2.4.

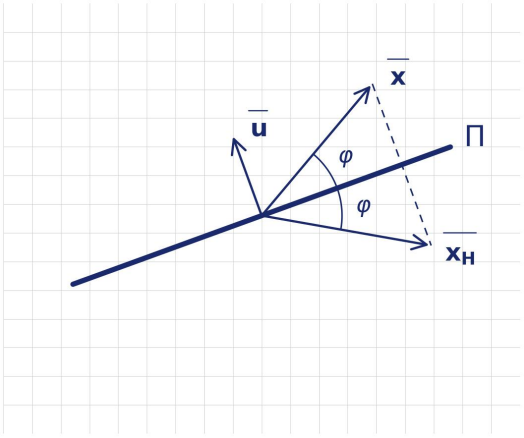

Рис. 2.4. Положение векторов **x** и $\mathbf{x_H}$ относительно плоскости П.

Наша задача — найти матрицу **H**, с помощью которой мы могли бы выполнить операцию отражения: $\mathbf{x}_H = \mathbf{H}\mathbf{x}$. Для этих целей выполним ряд построений, так как это показано на рис. 2.5.

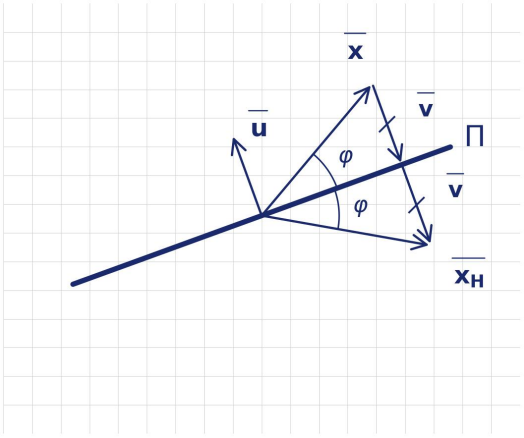

Рис. 2.5. Положение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x_H}$ относительно плоскости П.

Рассчитаем вектор $\mathbf{v} = \mathbf{P_u x} = \mathbf{u u}^H \mathbf{x}$ (проекция $\mathbf{x}$ на направление $\mathbf{u}$). Из рис. 2.5 видно, что $\mathbf{x}_H = \mathbf{x} - 2\mathbf{v} = \mathbf{x} - 2\mathbf{u u}^H \mathbf{x}$. Таким образом, можно записать $\mathbf{x}_H = (\mathbf{I} - 2\mathbf{u u}^H)\mathbf{x} = \mathbf{H x}$, где $\mathbf{H}$ — матрица отражения Хаусхолдера, равная:

$$\mathbf{x}_H = (\mathbf{I} - 2\mathbf{u u}^H)\mathbf{x}. \tag{2.4}$$

Для использования преобразования Хаусхолдера для приведения матрицы к нижнетреугольному виду необходимо — как и в случае с преобразованием Гивенса — несколько модифицировать исходное выражение для матрицы $\mathbf{H}$. Научимся делать это в два шага.

Шаг 1. Рассмотрим два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_H$ одинаковой длины (см. рис. 2.6). Наша задача — найти такую матрицу $\mathbf{H}$, что $\mathbf{x}_H = \mathbf{H x}$.

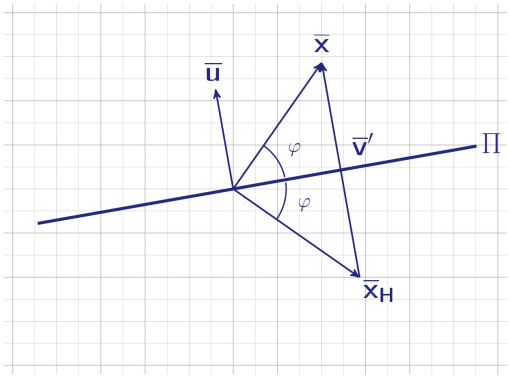

Рис. 2.6. Отражение вектора $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{x_H}$.

Построим плоскость П, с которой оба вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_H$ образуют угол φ. Для нахождения матрицы Хаусхолдера нам необходимо найти вектор $\mathbf{u}$ (тот

самый «управляющий джойстик», отвечающий за положение плоскости П) и подставить его в формулу (2.4). Из рис. 2.6 видно, что данный вектор коллинеарен вспомогательному вектору $\mathbf{v}'$, определяемому как:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_H. \tag{2.5}$$

(Здесь используется обозначение $\mathbf{v}'$, чтобы отличить этот вспомогательный вектор от проекции $\mathbf{v} = \mathbf{P_u x}$, введённой выше при выводе формулы (2.4); оба вектора коллинеарны $\mathbf{u}$, но отличаются длиной и в данном случае ещё и знаком: $\mathbf{v}' = -2\mathbf{v}$.)

Поскольку вектор $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}'\|}$, то матрицу Хаусхолдера можно записать, используя для простоты сразу же вектор $\mathbf{v}'$: $\mathbf{H} = \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}'^H}{\|\mathbf{v}'\|^2}\right)$. Таким образом, мы научились находить матрицу $\mathbf{H}$, обеспечивающую отражение вектора $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}_H$.

Шаг 2. Рассмотрим задачу отражения вектора $\mathbf{x}$ таким образом, чтобы все компоненты вектора $\mathbf{x}_H$ были бы нулевыми за исключением первой, равной $\|\mathbf{x}\|$: $\mathbf{x}_H = (\pm\|\mathbf{x}\|, 0, \ldots, 0)^T$. То есть фактически необходимо осуществить отражение вектора $\mathbf{x}$ на направление, определяемое ортом $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. При этом для вычисления матрицы Хаусхолдера необходимо найти вектор $\mathbf{v}'$, который, с учётом формулы (2.5), очевидно, будет представлять собой вектор $\mathbf{x}$ с модифицированным первым компонентом $v'_1 = x_1 \mp \|\mathbf{x}\|$.

Примечание: выбор знака первой компоненты вектора $\mathbf{x}_H$ рекомендуется осуществлять так, чтобы в случае, если значение x_1 будет близко по величине к $\|\mathbf{x}\|$, не произошло обнуление первой компоненты вектора $\mathbf{v}'$ (в рассматриваемом случае, очевидно, она имеет наибольшее значение). Таким образом, можно ориентироваться на знак x_1, тогда $v'_1 = x_1 + \mathrm{sign}(x_1)\|\mathbf{x}\|$ или $v'_1 = x_1 + \frac{x_1}{|x_1|}\|\mathbf{x}\|$.

Таким образом, благодаря применению преобразования Хаусхолдера с матрицей $\mathbf{H} = \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}'^H}{\|\mathbf{v}'\|^2}\right)$ к вектору $\mathbf{x}$ при $\mathbf{v}' = (x_1 + \frac{x_1}{|x_1|}\|\mathbf{x}\|, x_2, \ldots, x_n)^T$ мы получаем вектор $\mathbf{x}_H$, в котором обнулены все элементы за исключением первого, равного $-\frac{x_1}{|x_1|}\|\mathbf{x}\|$.

Если необходимо обнулить все элементы вектора $\mathbf{x}$ за исключением i-го элемента, то вектор $\mathbf{v}'$ будет иметь следующий вид: $\mathbf{v}' = (x_1, x_2, \ldots, x_i + \frac{x_i}{|x_i|}\|\mathbf{x}\|, \ldots, x_n)^T$.

Однако при приведении обучающего пакета к нижнетреугольному виду не требуется обнуление всех элементов векторов (за исключением случая, когда мы работаем с первым столбцом или строкой). Таким образом, применение преобразования Хаусхолдера для этих целей будет иметь некоторые особенности, которые мы рассмотрим ниже на примере работы с первыми тремя столбцами квадратной матрицы $\mathbf{X}$, состоящей из векторов $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Работа с обучающим пакетом будет заключаться, как

уже отмечалось ранее, в преобразовании строк, следуя аналогичным принципам.

Для целей преобразования первого столбца матрицы $\mathbf{X}$ выбираем вектор $\mathbf{v}' = (x_{11} + \frac{x_{11}}{|x_{11}|}\|\mathbf{x}_1\|, x_{21}, \ldots, x_{n1})^T$, обнуляя все элементы первого столбца за исключением первого. Здесь $\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2 + \ldots + |x_{n1}|^2}$ — евклидова норма столбца.

Для целей преобразования второго столбца матрицы $\mathbf{X}$ выбираем вектор $\mathbf{v}' = (0, x_{22} + \frac{x_{22}}{|x_{22}|}\|\mathbf{x}'_2\|, x_{32}, \ldots, x_{n2})^T$, обнуляя все элементы второго столбца матрицы $\mathbf{X}$ за исключением первого и второго, где $\|\mathbf{x}'_2\| = \sqrt{|x_{22}|^2 + |x_{32}|^2 + \ldots + |x_{n2}|^2}$ (это важно помнить, т.к. обеспечивает сохранение нормы отражаемого вектора).

Для целей преобразования третьего столбца матрицы $\mathbf{X}$ выбираем вектор $\mathbf{v}' = (0, 0, x_{33} + \frac{x_{33}}{|x_{33}|}\|\mathbf{x}'_3\|, x_{43}, \ldots, x_{n3})^T$, обнуляя все элементы третьего столбца матрицы $\mathbf{X}$ за исключением элементов с первого по третий, где $\|\mathbf{x}'_3\| = \sqrt{|x_{33}|^2 + |x_{43}|^2 + \ldots + |x_{n3}|^2}$.

В итоге за счет n преобразований Хаусхолдера исходная матрица приводится к верхнетреугольному виду:

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{H_1}\mathbf{H_2}\ldots\mathbf{H_n}.$$

Пример: приведение обучающего пакета 3×5 к нижнетреугольному виду

Рассмотрим ту же матрицу $N \times K = 3 \times 5$, что и в примере для вращений Гивенса. Символ $\times$ — элементы, обнуляемые на данном шаге. Рамкой обведена область модифицируемых элементов. Каждое отражение обнуляет *всю строку* правее диагонали за один шаг.

Строка 1: обнуляем позиции 2–5 за одно отражение $\mathbf{H}_1$.

$$\begin{pmatrix} * & \times & \times & \times & \times \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}_1} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Строка 2: обнуляем позиции 3–5 за одно отражение $\mathbf{H}_2$.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \times & \times & \times \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}_2} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Строка 3: обнуляем позиции 4–5 за одно отражение $\mathbf{H}_3$.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}_3} \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{L} \mid \mathbf{0}\,)$$

Итого: $N_H = N = 3$ отражения Хаусхолдера. В общем случае для матрицы $N \times K$: $N_H = N$.

Глава 3

Дифференцирование в задачах оптимизации ААР

3.1 Операции дифференцирования

Центральной задачей синтеза адаптивных антенных решёток является нахождение оптимального вектора весовых коэффициентов $\mathbf{w}$, обеспечивающего минимум мощности помехи на выходе адаптивной антенной решетки при сохранении приема полезного сигнала (задача условной оптимизации) [4, 5, 7, 8]:

$$\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w} \to \min_{\mathbf{w}}, \quad \text{при ограничении} \quad \mathbf{w}^H\mathbf{s} = 1,$$

где $\mathbf{R}$ — ковариационная матрица помехи, $\mathbf{s}$ — опорный вектор, характеризующий направление прихода полезного сигнала.

Для решения данной задачи применяют *метод множителей Лагранжа*. Вводится функция Лагранжа:

$$L(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*, \mu) = \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w} - \mu\big(\mathbf{w}^H\mathbf{s} - 1\big),$$

где μ — вещественный множитель Лагранжа. Необходимым условием минимума является обращение в нуль градиента L по $\mathbf{w}^*$:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}^*} = \mathbf{R}\mathbf{w} - \mu\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}.$$

Из условия $\mathbf{w}^H\mathbf{s} = 1$ определяется μ, и окончательно:

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \frac{1}{\mathbf{s}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}.$$

Для понимания математического аппарата, используемого при решении задач условной оптимизации, приведем ниже ряд примеров по взятию производных по векторным величинам.

Утверждение 1 (Производная скаляра по вектору)**.** Производная скалярной величины a по вектору $\mathbf{x}$ размерностью $N \times 1$ есть вектор того же размера:

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial a}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Элементами результирующего вектора являются частные производные от a по каждой компоненте вектора $\mathbf{x}$.

Утверждение 2 (Производная скалярного произведения по вектору)**.**

$$\frac{\partial \mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}.$$

Доказательство. Рассмотрим скаляр $a = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$. Частная производная от суммы по компоненте x_i вектора $\mathbf{x}$ равна y_i. Беря N частных производных по всем компонентам $\mathbf{x}$, получаем вектор $\mathbf{y}$.

Утверждение 3 (Производная от $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ по вектору)**.** Для матрицы $\mathbf{A}$, не зависящей от $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T\mathbf{y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Доказательство. Произведём замену $\mathbf{w}^T = \mathbf{y}^T\mathbf{A}$, тогда $a = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$. По утверждению 2: $\frac{\partial \mathbf{w}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{w} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$. Второе соотношение выводится аналогично.

Утверждение 4 (Производная вектора-строки по вектору)**.** Производная вектора-строки $\mathbf{y}^T$ размерностью $1 \times M$ по вектору $\mathbf{x}$ размерностью $N \times 1$ есть матрица размерностью $N \times M$:

$$\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial y_1}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial y_2}{\partial \mathbf{x}}, \cdots, \frac{\partial y_M}{\partial \mathbf{x}}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_M}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_M}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_N} & \frac{\partial y_2}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial y_M}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

i-й столбец матрицы — вектор-производная элемента y_i по вектору $\mathbf{x}$. Частный случай: $\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}$.

Утверждение 5 (Производная скалярного произведения по третьему вектору)**.**

$$\frac{\partial \mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{y}.$$

Доказательство. Частная производная суммы $\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ по z_k: $\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial y_i}{\partial z_k} + \sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial x_i}{\partial z_k}$. Результат — вектор, представляющий сумму двух

слагаемых, каждое из которых получается умножением матрицы Якоби на соответствующий вектор.

Утверждение 6 (Производная квадратичной формы)**.** Для произвольной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}.$$

Для симметричной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Доказательство. Применяя ранее полученные результаты: $\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}$. При $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ получаем $2\mathbf{A}\mathbf{x}$. Эта формула непосредственно используется при поиске оптимального вектора весовых коэффициентов в ААР.

Ниже в табл. 3.1 для удобства приведены формулы дифференцирования, рассмотренные выше:

$\frac{\partial \mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}$	$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$	$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
$\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}$	$\frac{\partial \mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{y}$
$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}$	$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$ (для симметричной $\mathbf{A}$)

Таблица 3.1. Формулы дифференцирования векторных и матричных выражений.

Для исследования алгоритмов обработки сигналов в адаптивных антенных решетках часто используется комплексное представление сигналов [5, 17]. При этом приходится решать задачи вычисления градиента квадратичной формы $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ (где $\mathbf{R}$ — ковариационная матрица помехи, $\mathbf{w}$ — вектор весовых коэффициентов ААР). Вместе с тем, в отличие от действительного представления сигналов — $\mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w}$ — работа с комплексным представлением требует уточнения операций дифференцирования на случай работы с векторами $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}^H$. Рассмотрению особенностей вычисления градиента при комплексном представлении сигналов посвящена статья [12], также данный вопрос рассмотрен в [8]. В данном методическом пособии рассмотрены основные положения статьи [12] в сжатом изложении.

Рассмотрим функцию $g(z, z^*) : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $z = x + jy$, $z^* = x - jy$. Рассмотрим также функцию $f(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такую что $g(z, z^*) = f(x, y)$. Тогда, вычисляя частные производные функции $f(x, y)$ по x и y, получим соответственно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial y}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ и $\frac{\partial z^*}{\partial x} = 1$, а $\frac{\partial z}{\partial y} = j$ и $\frac{\partial z^*}{\partial y} = -j$, выражения для частных производных функции $f(x, y)$ принимают вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z^*},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = j\left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z^*}\right).$$

Используя данные выражения, несложно вычислить соотношения для частных производных $\frac{\partial g}{\partial z}$ и $\frac{\partial g}{\partial z^*}$:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - j\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{3.2}$$

Основываясь на полученных соотношениях, можно сделать важный вывод: принимая $g = z$ и соответственно $f(x, y) = x + jy$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial z^*} = 0. \tag{3.3}$$

Аналогично, для $g = z^*$ и $f(x, y) = x - jy$:

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z^*}{\partial z^*} = 1. \tag{3.4}$$

Воспользовавшись выражением (3.2), вычислим градиент квадратичной формы $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ по $\mathbf{w}^*$ (при этом обычно для краткости записывают градиент по эрмитово сопряженному вектору $\mathbf{w}^H$):

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}^*} = \frac{\partial (\mathbf{w}^*)^T\mathbf{R}}{\partial \mathbf{w}^*}\mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{w}^*}\mathbf{R}^T\mathbf{w}^*.$$

С учётом выражений (3.3) и (3.4): $\frac{\partial (\mathbf{w}^*)^T\mathbf{R}}{\partial \mathbf{w}^*} = \mathbf{R}$, а $\frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{w}^*} = 0$, тогда:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}^*} = \mathbf{R}\mathbf{w}.$$

Аналогично можно вычислить производную квадратичной формы $\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$ по $\mathbf{w}$:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial (\mathbf{w}^*)^T\mathbf{R}}{\partial \mathbf{w}}\mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{w}}\mathbf{R}^T\mathbf{w}^*.$$

С учётом выражений (3.3) и (3.4): $\frac{\partial (\mathbf{w}^*)^T\mathbf{R}}{\partial \mathbf{w}} = 0$, а $\frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{I}$, тогда:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{R}^T\mathbf{w}^*.$$

Пользуясь выражениями (3.3) и (3.4), можно также показать, что:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H\mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}} = 0, \frac{\partial \mathbf{s}^H\mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{s}^*,$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}^H \mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}^*} = \mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{s}^H \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}^*} = 0.$$

Ниже в табл. 3.2 для удобства приведены формулы дифференцирования для случая комплексных величин (взятие производных при этом записано по эрмитово сопряженному вектору — $\mathbf{w}^H$ в соответствии с обозначениями, принятыми в [8]):

$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$	$\frac{\partial z}{\partial z^*} = 0$
$\frac{\partial z^*}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial z^*}{\partial z^*} = 1$
$\frac{\partial \mathbf{w}^H \mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}} = 0$	$\frac{\partial \mathbf{w}^H \mathbf{s}}{\partial \mathbf{w}^H} = \mathbf{s}$
$\frac{\partial \mathbf{s}^H \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{s}^*$	$\frac{\partial \mathbf{s}^H \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}^H} = 0$
$\frac{\partial \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{R}^T \mathbf{w}^*$	$\frac{\partial \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}}{\partial \mathbf{w}^H} = \mathbf{R}\mathbf{w}$

Таблица 3.2. Формулы дифференцирования векторных и матричных выражений.

Глава 4

Моделирование помеховой обстановки

Рассмотрим вопрос расчета N-мерного случайного вектора $\mathbf{x}$ на выходе элементов ААР [18].

Пусть $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ — ковариационная матрица помех, описывающая заданную помеховую обстановку. Рассчитаем вектор $\mathbf{z}$, состоящий из N комплексных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для расчета элементов вектора $\mathbf{z}$ воспользуемся формулой $z_n = \sqrt{-\ln x_{1n}} \exp(j2\pi x_{2n})$, где x_{1n} и x_{2n} — случайные величины, имеющие равномерное распределение на интервале $(0, 1)$.

При этом для расчета вектора $\mathbf{x}$ можно воспользоваться формулой:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{z}.$$

Действительно, $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathbf{H}}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{H}}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^{\mathbf{H}}\}$, то есть $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathbf{H}}\} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbb{E}\{\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{H}}\}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}^{\mathbf{H}}$. Учитывая, что $\mathbb{E}\{\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{H}}\} = \mathbf{I}$, получаем $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathbf{H}}\} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathbf{H}} = \mathbf{R}_{\text{пш}}$.

Для выполнения соотношения $\mathbb{E}\{\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{H}}\} = \mathbf{I}$ требуется, чтобы математическое ожидание величины z_n равнялось нулю, а её дисперсия была равна единице. Рассмотрим $z_n = \sqrt{-\ln x_{1n}} \exp(j2\pi x_{2n})$. Представим данное комплексное число в показательной форме $z_n = A_n \exp(j\varphi_n)$, где $A_n = \sqrt{-\ln x_{1n}}$, а $\varphi_n = 2\pi x_{2n}$.

1. Найдем математическое ожидание. Вычислим $\mathbb{E}\left[e^{j\varphi_n}\right]$:

$$\mathbb{E}\left[e^{j\varphi_n}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{j2\pi}-1}{j} = 0. \tag{4.1}$$

Таким образом, т.к. $\mathbb{E}[z_n] = \mathbb{E}[A_n]\cdot\mathbb{E}\left[e^{j\varphi_n}\right]$, то $\mathbb{E}[z_n] = 0$.

2. Найдем $\mathbb{E}[A_n^2]$ и $\mathbb{E}[|e^{j\varphi_n}|^2]$:

Вычислим $\mathbb{E}[A_n^2]$. Поскольку $A_n = \sqrt{-\ln x_{1n}}$, а $x_{1n} \sim \mathcal{U}(0,1)$:

$$\mathbb{E}[A_n^2] = \mathbb{E}[-\ln x_{1n}] = -\int_0^1 \ln(x)\, dx = 1. \tag{4.2}$$

Вычислим $\mathbb{E}[|e^{j\varphi_n}|^2]$:

$$\mathbb{E}\left[|e^{j\varphi_n}|^2\right] = \mathbb{E}[1] = 1. \tag{4.3}$$

Поскольку A_n и φ_n независимы, дисперсия z_n равна:

$$\mathbb{E}[|z_n|^2] = \mathbb{E}[A_n^2] \cdot \mathbb{E}\left[|e^{j\varphi_n}|^2\right] = 1 \cdot 1 = 1. \tag{4.4}$$

Таким образом, каждый элемент вектора $\mathbf{z}$ имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Поскольку элементы z_n попарно независимы (генерируются из независимых пар (x_{1n}, x_{2n})), ковариационная матрица вектора $\mathbf{z}$ равна единичной: $\mathbb{E}\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\} = \mathbf{I}$, что и требовалось показать.

Список литературы

[1] Верба, В. С. Основы теории радиолокационных систем и комплексов / В. С. Верба, Б. Г. Татарский. — 2-е изд. — М. : Техносфера, 2025. — 313 с. — ISBN 978-5-94836-734-7.

[2] Авиационные радиолокационные комплексы и системы / под ред. П. И. Дудника. — М. : Изд-во ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 2006. — 1112 с.

[3] Адаптивная компенсация помех в каналах связи / под ред. Ю. И. Лосева. — М. : Радио и связь, 1988. — 208 с.

[4] Монзинго, Р. А. Адаптивные антенные решётки: Введение в теорию / Р. А. Монзинго, Т. У. Миллер ; пер. с англ. — М. : Радио и связь, 1986. — 448 с.

[5] Richards, M. A. Fundamentals of Radar Signal Processing / M. A. Richards. — 1st ed. — New York : McGraw-Hill, 2005. — 513 с. — ISBN 0-07-144474-2.

[6] Klemm, R. Principles of Space-Time Adaptive Processing / R. Klemm. — 3rd ed. — London : The Institution of Engineering and Technology (IET), 2006. — 642 с. — ISBN 0-86341-566-5.

[7] Guerci, J. R. Space-Time Adaptive Processing for Radar / J. R. Guerci. — Boston : Artech House, 2003. — 212 с. — ISBN 1-58053-377-9.

[8] Van Trees, H. L. Optimum Array Processing. Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory / H. L. Van Trees. — New York : Wiley-Interscience, 2002. — 1472 с. — ISBN 0-471-09390-4.

[9] Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые её приложения / Л. И. Головина. — М. : Наука, 1975. — 407 с.

[10] Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.

[11] Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер ; пер. с англ. — М. : Наука, 1977. — 280 с.

[12] Brandwood, D. H. A Complex Gradient Operator and its Application in Adaptive Array Theory / D. H. Brandwood // IEE Proceedings F (Communications, Radar and Signal Processing). — 1983. — Vol. 130, No. 1. — P. 11–16. — DOI: 10.1049/ip-f-1.1983.0003.

[13] Van de Geijn, R. Advanced Linear Algebra: Foundations to Frontiers / R. Van de Geijn, M. Myers ; The University of Texas at Austin. — Электронный ресурс. — URL: https://www.cs.utexas.edu/~flame/laff/alaff/preface.html (дата обращения: 07.06.2026).

[14] Ward, J. Space-Time Adaptive Processing for Airborne Radar : Technical Report 1015 / J. Ward. — Lexington, MA : MIT Lincoln Laboratory, 1994. — 179 с.

[15] Zatman, M. Covariance Matrix Augmentation to Produce Adaptive Array Pattern Troughs / M. Zatman // Proceedings of the IEE Radar, Sonar and Navigation. — 1996. — Vol. 143, No. 2. — P. 102–105. — DOI: 10.1109/PAST.1996.566122.

[16] Carlson, B. D. Covariance Matrix Estimation Errors and Diagonal Loading in Adaptive Arrays / B. D. Carlson // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1988. — Vol. 24, No. 4. — P. 397–401. — DOI: 10.1109/7.7181.

[17] Трахтман, А. М. Введение в обобщённую спектральную теорию сигналов / А. М. Трахтман. — М. : Советское радио, 1972. — 352 с.

[18] Brennan, L. E. Efficient Simulation of External Noise Incident on Arrays / L. E. Brennan, J. D. Mallett // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1976. — Vol. 24, No. 5. — P. 740–741. — DOI: 10.1109/TAP.1976.1141397.